〈総　説〉

数学、自然、コンピューター

渡辺　浩

Mathematics, Nature, and the Computer

Hiroshi WATANABE

(2011年1月12日受理)

要約　数学と自然とコンピューターの関わり合いを軸に、数理科学の営みを概観する。自然を記述する言語としての数学が自然科学とともに発達し、両者の関係にコンピューターが参加するようになって数理科学の現代像が成立する過程を、歴史的なエピソードを交えて素描する。さらに現代の数理科学の現状を踏まえていくつかの未解決問題を取り上げ、その意味を考える。記述は自然科学を専門としない読者が筋を辿れるように工夫し、題材は系統的というよりも自由な連想を妨げずに選んだ。

1.　はじめに

様々な視点が交錯するところに、新たな物の見方が成立することは稀ではない。数学をこの観点から、即ち自然科学の諸分野との関係において捉えることは、数学をより深いものにしてくれる。この稿の目的は、数学という人の知について、自然科学の枠の中で、コンピューターの存在を踏まえて概観することである。

ところで数学研究においてコンピューターを用いるということは、一見何の不思議もないかのようである。しかし実は自明でないいろいろな問題があり、またコンピューターは数学においてなぜ必要なのか、どういう場面で必要になるのかという疑問もあろう。数学とコンピューターの関係をどのように見るべきか —— このように問うとき、私たちは数学とコンピューターの関係ではなく、数学とコンピューターと自然の関係を見るべきであることに気づく。さらにこの観点に立つとき、自然科学の全体を視野に置くことにもなる。

この小論の前半(2 節～4 節)では、人の思考において、数学と自然とコンピューターが互いに関わり合うことによって、それぞれ単独では得られないような豊かな知見を生み出し得ることに注目し、三者の関係が成立して行く様子を素描する。また後半(5 節～7 節)では、この

日本医科大学・数学教室　Department of Mathematics, Nippon Medical School

三者の関係を基礎に、さらなる数理科学の思想の変遷を追い、現状を踏まえ、将来を展望してみたい。

2. 数学と自然

『タイタニック』(1997) という映画の日本語字幕を見ていておもしろいことに気づいた[1)]。船が氷山に衝突し、乗船していた技術者が被害報告を聞いて、「この船は沈む」と結論する場面がある。クルーにその根拠を尋ねられた技術者は 'mathematical consequence' と答えるのだが、そのとき日本語字幕は「物理的帰結」になっていた。船の沈没を予測する理論を、西欧では数学と呼び、日本では物理と呼んでいるのである。数学が自然を記述するということの捉え方が、洋の東西でいまも微妙にずれていることを感じる。

数学と自然の素朴な一体感

歴史的には、数や図形の概念が物を数えることや土地の測量や天文観測などを起源として発生したという認識は定説となっている。数学の歴史の最初の 1 ページにおいて、自然という実在と数学という虚構は分かち難く結びついていたのである。そしてアルキメデス (前 287?-前 212) が「テコの原理」を用いて図形の面積を巧妙に求めた仕事なども、数学と自然の素朴な一体感の延長線上でなされたものと言ってよいだろう[2)]。

宇宙という書物

このような数学と自然の関係は、17 世紀から 18 世紀における「力学」の誕生を契機として、一段と深いものになる。ガリレイ (1564-1642) の『偽金鑑識官』(1623) に含まれる次の断章はつとに有名である[3)]。

> 哲学は、目の前にたえず開かれている巨大な書、[すなわち、宇宙] のなかに、書かれているのです。しかし、まずその言語を理解し、そこに書かれている文字を解読することを学ばないかぎり、理解できません。その書は数学の言語で書かれており、その文字は三角形、円その他の幾何学図形であって、これらの手段がなければ、人間の力では、そのことばを理解できないのです。それなしには、暗い迷宮を虚しくさまようだけなのです。

現代の自然科学は、ガリレイたちが読み解こうとした「巨大な書」の '現代の章' に書かれている。「言語」も「文字」もその種類を増し、「哲学」はますます読み解きがたくなってはいるものの、間違いなくガリレイたちが読んでいた書物の一部である。ここで、「なぜ、かように、数学は自然を記述し得るのか」という疑問が生じても不思議はない。その答えは十人十色であろうし究極的な答えがあるとも思えないが、ついこのように問いたくなるほど数学は自然を見事に記述して来た。

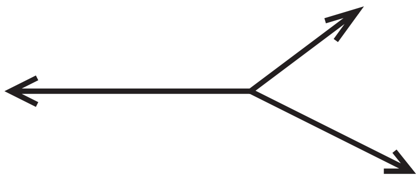

図 1： 3 つの力のつり合い

自然を記述する数学

自然を記述する数学の端的な例を挙げてみよう。

図 1 は力を矢印（ベクトル）を用いて表すことにして、3 つの力がつり合っている状況を描いたものである。よく知られているように、3 つの力のつり合い条件は平行四辺形の対角線を用いて表現することができる。このことに何も不思議はないようであるが、本当にそうだろうか。力のつり合いは自然法則であり、自然がなぜそのような法則を選んだのかということは人知の及ぶところではない。他方、平行四辺形の対角線としてベクトル和を定める規則はきわめて ‘自然な’ 規則であるが、人が定めたものである。即ち、人が定めたベクトルの和は自然における力の和にぴったり一致している。これは自明だろうか[4)]。

自然を記述する数学の例をもうひとつ挙げてみよう[5)]。

火星の動きを詳細に観測したティコ・ブラーエ（1546-1601）の結果から、ケプラー（1571-1630）は 3 つの法則を導き出した。その 1 つが「惑星は太陽を焦点とする楕円軌道を描く」というものである[6)]。「太陽の引力が距離の 2 乗に反比例するなら、惑星の軌道はどのようなものになるか」とハレー（1656-1743）に問われたニュートン（1643-1727）は、即座に「楕円軌道だ」と答える。ハレーが驚いて「どうしてそれを知ったのか」と問い、ニュートンは「計算したことがあったから」と答える[7)]。その「計算」を公表するようにハレーに強く勧められて世に出たのが、ニュートンの大著『自然哲学の数学的原理』（1686-1687）である。その中でニュートンは、彼の力学法則に基づき、アポロニウス（前 262-前 200?）の楕円の幾何学を駆使して、ケプラーの 3 法則と万有引力との関係を論じている。火星はアポロニウスの幾何学を熟知しているかのようである。

力学と微分積分学

ここで、ニュートンの仕事についてひとつ注意しておきたいことがある。ニュートンが『自然哲学の数学的原理』において駆使しているのは、「楕円の幾何学」であって「微分積分学」ではない。ニュートンは力学と微分積分学の両方を作ったが、意外なことに力学において微分積分学を用いてはいない[8)]。微分積分学を用いてニュートンの力学を再構成したのはオイラー（1707-1783）であり、それが『力学』（1736）として公表されたのは『自然哲学の数学的原理』から 50 年後のことである。力学問題に対するニュートンの解はきわめて巧妙な職人の技であるが、各々の問題に対してそれに適する方法が個別に選ばれている。このようなニュートンのアプローチについて、山本義隆は次のように指摘する[5)]。

> そのこと［ニュートンの解法が各問題に対して巧妙であるということ］は裏返せば問題処理の定型が確立されていないということで、そのままでは力学をより多くの問題に適用可能な汎用的理論に脱皮させる道は塞がれていたのである。

実際山本義隆によれば，オイラーは『力学』の序文の中で次のように述べている。

> たとえ［『自然哲学の数学的原理』の］読者がそこに提示されている事柄の正しさを確信したとしても、彼はその事柄について十分明晰な知識を得ることができないであろう。それゆえ、もしも同じ問題がわずかに変えられたならば、自分で解析学にたより、同じ命題を解析的な方法で展開してみないかぎり、それを自力で解くことはできないであろう。

微分積分学は力学を自然な形で定式化するために必須であり[9]、それと同時に、力学は微分積分学の成長を促して数学の世界を豊かなものにしたのである。惑星たちは微分積分学をも熟知していたかのようである。

ところで、ニュートンと同時代のものとも言い得る日本固有の数学である和算について、佐々木力は次のように述べている[10]。

> 和算の高度のレヴェルは、ある程度は近代西欧のヴィエトからニュートンの直前までの達成に比肩できるほどであったと言ってよいかもしれない。ただし、体系的な微分積分学形成までは遠く及んではいない。(中略) 中国数学は、プラグマティックな一般的民族性に影響されて、実用的枠組みから大きく超え出ることがなかったが、和算は、純粋数学側面を大きく発展せしめた。

和算は微分と積分の概念を有していたが、両者が互いに逆の関係にあるという「微分積分学の基本定理」を得ていた形跡はないと言われている。さらに和算と西欧数学との著しい違いは、和算が自然認識と結びついた形で成長せず、むしろ芸道の一つとして追求されたことであろう。

自然と数学の新たな関係

ここまで、近世ヨーロッパにおいて自然と数学の新たな関係が成立した様子を見てきた。実際この時代に、「仮説を立て、客観的な証拠によりその真偽を判定する」という自然科学の基本原理が成立したのである。即ち、自然法則が数学という言語で記述され、それに基づいて定量的な予言が可能になったために、自然法則の真偽を客観的に判定できるようになったと

言える。

ところでケプラーは、いわゆる「ケプラーの法則」に到達する前に様々の誤謬を犯していたという事実は興味深い[11)]。まずケプラーはティコ・ブラーエと出会う前、太陽系の構造を「正多面体が 5 つ存在する」という数学的事実に結びつけて説明しようとしている。彼はもともと神秘主義的な傾向を色濃くもつ人だったが、「秩序ある宇宙(コスモス)の基本原理」として数に興味をもっていたピュタゴラス学派[12)]の影響を受けていたと言われている。またケプラーは火星の軌道が太陽を焦点とする楕円であるという結論に到達する前、火星の軌道を卵形線の一種であるとする強い思い込みに支配されていた[6)]。円でないなら楕円だろうという発想にすぐさま至らなかったのはなぜかという問題には様々な議論があるが、円と卵形線は 1 つの中心をもつ曲線であるのに対し、楕円は 2 つの焦点(いわば分裂した中心)をもつため、その一方に太陽を置き他方を空席にする考え方に抵抗があったのであろう。さらにケプラーは、惑星の公転周期が太陽からの平均距離の 3/2 乗に比例するという事実を見出す前、惑星の速度を音楽の和声の法則に結びつけようと試みたというが、ここにもピュタゴラス学派の影響を見て取ることができよう。

モデルによる自然の理解

ピュタゴラス学派やケプラーのように、宇宙の理想的調和性や美的完全性の象徴として数学を位置づける思想や、数学に森羅万象の究極的説明原理の機能を負わせる思想は古代から見られる。また自然の振る舞いを数学的原理に結びつけ、そこに自然の神秘を見ようとする性向は、現代人にもないわけではない。しかし自然科学的立場からは、このような思想をそのままの形で肯定するわけには行かない。自然が数学的法則に支配されているという思想は、自然が善悪の原理に支配されているという幻想と同様に根拠がないと考えるべきである[13)]。数学的法則に支配されているのは自然ではなく自然法則であり、自然法則とは、いわば人の思考世界に構築された理念的自然である。この理念的自然を「モデル」と呼ぶ。

あらためて言い直せば、近世ヨーロッパにおいて成立した自然と数学の関係は、自然の振る舞いをモデルを用いて理解するという関係であると言える。ただし、これはあくまで現代的立場からそのように見るのであって、ニュートンが「自然のモデルを作る」という意識をもっていたというわけではない[14)]。

モデルの世界

ここで、自然という背景を忘れてモデルの世界に入ってみたらどうだろうか。即ち、力のつり合いという物理的意味を忘れて「ベクトルの世界」に入り、惑星の運動法則という物理的意味を忘れて「微分積分学の世界」に入るのである。このとき、自然の振る舞いに関する議論は、自然の振る舞いから分離された形で定式化され、数学の定理となる。この意味で、人間は自然から数学を学んだと言ってよい。もちろん数学は人間の純粋に知的な営みであり、具体的な経験と直接的な関係のない知的領域に成立するものであって、数学的発想は自然現象による限定を受けるものではない。しかし、もしも人間が自然から学ぶということがなけれ

ば、数学は限られた成果しか上げられなかったに違いない。「和算」はその歴史的証左でもあろうか。

3. 数学と自然とコンピューター

コンピューターは数学と自然の関係にどのような影響を与えたか、また数学はなぜコンピューターを必要とするのか。次にこれらのことについて考える。

情報の概念

20 世紀中葉、自然科学の舞台にコンピューターが登場する。世界最初のコンピューター ENIAC が作られたのが 1946 年、その後プログラム可能な(いわゆるフォン・ノイマン型)コンピューター EDSAC が作られたのが 1949 年のことである。

コンピューターは情報を操作する機械である。一般に「情報」とは対象となる系に関する ‘知識’ であり、知識は何らかの符号によって表現される。系の状態を文字どおり完全に提示していると言えるものは結局その系自体以外にないが、系自体は情報ではない。系に関する情報は系の状態の表現でなければならず、表現するためには符号を必要とするが、「符号」とは何らかの約束事に従って系の状態に対応付けられた一種の暗号である。

特にコンピューターにおいては、情報を書き込むプロセスと読み出すプロセスが必要であるが、前者においては外界によってメモリーを制御し、後者においてはメモリーによって外界を制御する。これらのプロセスにおいて、外界の状態を符号化する規則は任意に定めることができるので、コンピューターが処理する信号は ‘意味がない暗号’ である。ここで「信号は無意味である」ということの重要性に注意しておきたい。それは以下のような観点である。

無根拠性

モノー(1910-1976)は生体システムにおける化学物質による制御を論じる中で、「機能自体とそれを制御している化学信号とのあいだには化学的には何の関連もない」という事実の重要性を指摘し、制御物質の化学的性質と生体システムにおける意味を対応づける規則の定め方には根拠がないという意味で、この性質を「無根拠性」と呼んだ[15)]。そして「分子進化はこの無根拠性のおかげで、莫大なサイバネティック的相互連絡のネットワークを作りあげてゆくことができたのである」と述べている。

生体システムにおける制御の意味を考えるために湿度の問題と対比させてみる。空気中で水の蒸発と水蒸気の凝縮という双方向の変化が同時に起きているが、一定の環境では負帰還の機構が働いて、湿度は一定に保たれる。それでは、この種の物理的機構をいくつか組み合わせて複雑な系を構築できるだろうか。それは不可能ではないだろうが、このような手段で込み入った合目的的な制御システムを設計するのはかなり難しそうである。実際物理的な因果関係をそのまま工学的に応用する場合、様々の制約のため小回りがきかず、目的のしかけを自由に設計するというわけには行かないだろう。それに対し、機能自体とそれを制御する信号とのあいだに何の関連もない「無根拠」な結び付きを利用するなら、「情報による制御」

が可能になり、情報を仲立ちにして複数の系を連結できるので、設計の自由度が格段に増すことだろう。この意味で、「莫大なサイバネティック的相互連絡のネットワーク」を構築するために「無根拠性」が本質的であり、それと同時に情報の概念そのものが「無根拠性（無意味性）」を基礎として成立すると考えられる[16)]。さらに情報が単なる連結部品であるに留まらず、むしろ情報を主役として情報を操作することが可能になれば、一層精緻な制御システムを実現できるということになろう。言うまでもなく、情報を操作するという考え方に基づいて作られた工学システムがコンピューターである。

シミュレーションのパラダイム

コンピューターの出現により、数学と自然の関係に変化が生じる。すでにモデルを用いて自然を記述する方法論が成立していたが、さらにモデルの世界を情報の世界に投影することにより、擬似的な自然、あるいは仮想的な自然を情報の世界の中に構築することができる。ここに、自然の振る舞いを仮想的な自然の中で数値的に再現するというシミュレーションのパラダイムが成立する。

自然科学の研究には理論と実験という 2 つのアプローチがあるが、コンピューターの出現によって、シミュレーションという第 3 のアプローチが見出されたことになる。ここで、情報が表現している外界の物理的状態と、情報を表現しているコンピューター内部の物理的状態が、もしも物理的に密着しているなら、シミュレーションは実質的に実験と異ならないだろう。実際には両者が密着していないということ、即ち、情報符号化の「無根拠性」が重要であると言える。

ともあれシミュレーションはさしあたり自然科学のパラダイムであって、数学のパラダイムではない。というのはシミュレーションはあくまで近似計算であって、近似計算からどのような結論を引き出そうと、それは数学の証明にはならないからである。したがって、数学とコンピューターの関係としては、これは間接的なものでしかない。しかしこの関係をもう一歩進めると、直接的な関係になる。即ち「自然」から数学を学ぶばかりでなく、「仮想的な自然」から数学を学ぶという可能性である。つまりコンピューターによるシミュレーションを数学の定理を予想する手段として利用するのである。

フェルミ、パスタ、ウラムの問題

コンピューターによるシミュレーションの初期の例としては、フェルミ、パスタ、ウラムによる非線型振動の解析（1955）が有名である[17)]。これは直観的に言えば、過去と未来を明確に区別している我々の経験を、過去と未来を区別しない力学法則に基づいて説明できるかという問題である。

たとえば鉄の棒の一端を加熱し他端を冷却してからこの棒を熱源から遠ざけて放置すると、次第に温度のむらが消えて温度が一様の状態に近づいて行く。このような状態を熱平衡状態という。経験的には、外界からの影響を遮断すると事物は次第に熱平衡状態に近づくのだが、この性質により時間の矢の方向が定まり、過去と未来が区別できるのである。19 世紀に古典

物理学的な自然観が成立するや、力学の法則に基づいて熱平衡状態への漸近を説明しようとする問題意識が発生したのである[18]。フェルミたちが目論んだのは、なるべく単純な設定の中でこの問題を調べることだった。

実は理想的な '結晶'[19] に力学を適用すると、熱平衡状態に近づくことはあり得ないことがすぐ分かるのだが、この '結晶' にわずかな '乱れ' を導入すれば[20]、系は次第に熱平衡状態に近づくだろうという予想があった。しかし純粋に理論的にこの問題を追求することは大変難しいため、フェルミたちはロスアラモス研究所に作られたばかりの MANIAC I というコンピューターを用いて、この問題を数値的に調べようとしたのである。

ところが非線型振動のシミュレーションは意外な振る舞いを示し、件の予想がそのままの形では正しくないことが明らかになり、逆の意味で数値計算の重要性を認識させる結果になった[21]。そしてこの問題はさらに別の形で追求され、「ソリトン理論」という数理物理学における偉大な成果として結実した[22]。この意味において、コンピューターは理論モデルの振る舞いについての正しい描像を得るための助けとして、目覚しい役割を果たしたのである。

数学が、あるいは数学者が、コンピューターを必要とするひとつの理由がここにある。

計算機支援証明

シミュレーションは近似計算であるから、数学の証明ではなく、定理を予想する手段として位置づけられる。しかしこれとは別に、数学の証明の一部にコンピューターを用いる「計算機支援証明(computer-aided proof)」と呼ばれるものがある。

計算機支援証明の実例としては、「どんな複雑な地図でも 4 色を用いれば隣同士の国を別の色で塗り分けられる」という「四色問題」が有名である。しかしここでは、計算機支援証明の原理を分かりやすく説明するために、分数の和

$$x = \frac{1}{3} + \frac{1}{7}$$

を求める問題を考える。まず x を電卓を用いて計算する。

$$\begin{aligned} x &= 0.333333 + 0.142857 \\ &= 0.476190 \end{aligned}$$

もちろんこれは数学として正しい等式ではない。そこで、数学的に正しい不等式

$$0.333333 < \frac{1}{3} < 0.333334$$
$$0.142857 < \frac{1}{7} < 0.142858$$

を組み合わせると、

$$0.476190 < x < 0.476192 \tag{1}$$

が得られる。もちろんこれでもまだ x の値を計算したことにならない。そこで、

$$21x \text{ は整数である} \tag{2}$$

という数学的事実に注意する。すると (1) から得られる不等式

$$9.99999 < 21x < 10.000032$$

と上記の数学的事実 (2) から、

$$\begin{aligned} 21x &= 10 \\ x &= \frac{10}{21} \end{aligned}$$

が得られる。

このように、

(1) 数値計算を、近似等式ではなく不等式の形で、言い換えれば、厳密な誤差評価を伴う形で行う

(2) 何らかの数学的理論を併用する

という形の証明が考えられるのである。(1)の部分の計算が人の手で実行不能なほど複雑である場合、この部分にコンピューターを用いることで証明が可能になることがある。また(1)の部分が数値計算ではなく、有限個に絞りこまれた可能性を 1 つ 1 つ調べる仕事である場合もある。いずれにせよ、人の理論的考察とコンピューターのパワーが協力して問題を解決するという構図になる。

このような計算機支援証明が成果を上げているところに、数学においてコンピューターを必要とするもうひとつの理由がある。

計算機支援証明の問題点

実はここにやっかいな問題がある。それは計算機支援証明の正しさを検証するためには、コンピュータープログラムの正しさも検証しなければならないということである。しかもコンピュータープログラムには、証明のために書いたプログラム自体だけでなく、C 言語や Fortran のようなコンパイラーや、Windows や UNIX のようなオペレーティングシステムも含めるべきであるし、さらに CPU やメモリーのようなハードウェアの状態すら問題と言えば問題である。

この種の問題に対して、異なるオペレーティングシステムをもつ異なるコンピューターを用いて、異なるアルゴリズムで異なる言語によりプログラムし、結果が一致することを確かめるという考え方もあろう。しかし厳密にはこれで完璧とも言えない。コンピューターを用いない通常の数学証明においても絶対的な正しさを保証することは結局不可能なのだが、計算機支援証明においてはこの問題が際立つのである。

また計算機支援証明は、コンピューターによる計算のプロセスが長くなるので、「証明を理解した」という感覚が希薄になり、「これで証明したと言えるのか」という疑問が生じることも否めない。計算機支援証明を数学文化の中にどう位置づけるかは、まだ個人差が大きいといったところである。

4. ガウス

数値計算によって数学の定理を予想するというと、いかにも現代的なアプローチのように聞こえるが、実はそうではない。コンピューターが出現する一世紀前、ガウス(1777-1855)は数値計算を多用していた[23)]。

算術幾何平均

2 つの正の数 x, y に対し、相加平均(算術平均)

$$x' = \frac{x+y}{2} \tag{3}$$

と相乗平均(幾何平均)

$$y' = \sqrt{xy} \tag{4}$$

を考える。さらに、x', y' の相加平均と相乗平均をそれぞれ x'', y'' とし、この手続きを限りなく繰り返す。このとき、相加平均と相乗平均は次第に近づいて、共通の極限値に収束する。この値を算術幾何平均という。図 2 は、1 と 10 を出発点にして、相加平均と相乗平均が互いに近づいて行く様子を図示したものである。ここで、一般に算術幾何平均が存在する(ある数に収束する)ことは簡単に証明できるのだが、問題はその値を知る(極限値を決定する)ことである。

ガウスの計算

ガウスは「幼少のときから算術幾何平均に興味を有して」いたというが、1799 年 5 月 30

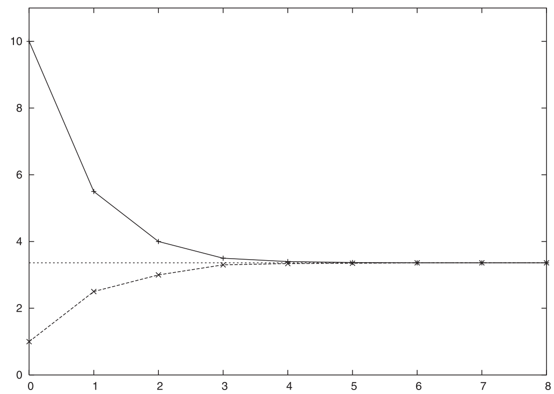

図 2： 1 と 10 の算術幾何平均に漸近する様子

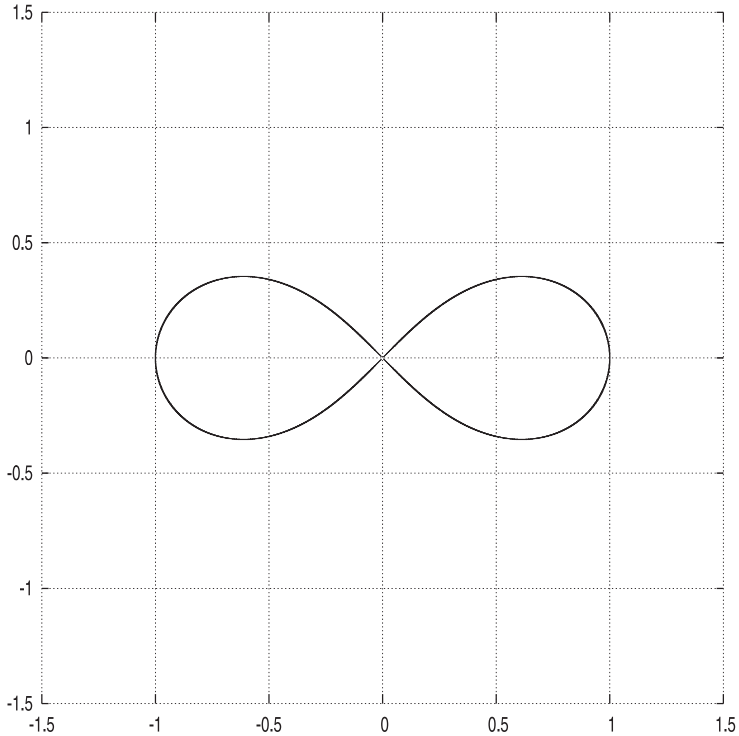

図 3： レムニスケート

日の日記には、1 と $\sqrt{2}$ の算術幾何平均 M と、積分

$$\omega = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \tag{5}$$

を手で計算し、M と $\dfrac{\pi}{2\omega}$ が小数第 11 位まで一致することを確かめたという記述がある。ガウスはこの発見を重視して、もしも

$$M = \frac{\pi}{2\omega} \tag{6}$$

であることが証明されれば、「解析の新分野が開かれるであろう」と考えたという。ちなみに、積分 (5) は、1797 年以来ガウスが調べていた「レムニスケート」と呼ばれる曲線(図 3) の長さ(の 1/4)を表す式である。

コンピューターによる計算

試みに現代のコンピューターを用いてガウスの手計算を追跡すると次のようになる。以下の結果は、$x_0 = 1, y_0 = \sqrt{2}$ から出発して、相加平均(x_n)と相乗平均(y_n)を小数 50 位まで計算したものである。

$$x_0 = 1$$

$$y_0 = 1.41421356237309504880168872420969807856967187537695$$

$$x_1 = 1.20710678118654752440084436210484903928483593768847$$
$$y_1 = 1.18920711500272106671749997056047591529297209246382$$

$$x_2 = 1.19815694809463429555917216633266247728890401507615$$
$$y_2 = 1.19812352149312012260658557182015245069201323840826$$

$$x_3 = 1.19814023479387720908287886907640746399045862674220$$
$$y_3 = 1.19814023467730720579838378818980070873183085585721$$

$$x_4 = 1.19814023473559220744063132863310408636114474129970$$
$$y_4 = 1.19814023473559220743921365592754367009328079481030$$

$$x_5 = 1.19814023473559220743992249228032387822721276805500$$
$$y_5 = 1.19814023473559220743992249228032387822721255837630$$

$$x_6 = 1.19814023473559220743992249228032387822721266321565$$
$$y_6 = 1.19814023473559220743992249228032387822721266321565$$

このように、6 段階目の相加平均と相乗平均は小数 50 位まで一致する。他方、数値積分のプログラムを利用して計算した $\dfrac{\pi}{2\omega}$ の値は、次のように x_6, y_6 と小数 50 位まで一致する。

$$\frac{\pi}{2\omega} = 1.19814023473559220743992249228032387822721266321565$$

楕円関数論

もちろんこれで等式 (6) が証明されたわけではない。厳密な証明には、数値計算とは全く異なる発想と論理が必要になる。

ガウスは 1800 年 5 月、楕円関数の理論を作り、その 1 つの帰結として、(6) が成立することを示した。ちなみに、楕円関数の性質を現代的な記号で書き表すと

$$\begin{aligned} \vartheta_3(2\tau)^2 &= \frac{1}{2}\left(\vartheta_3(\tau)^2 + \vartheta_0(\tau)^2\right) \\ \vartheta_0(2\tau)^2 &= \sqrt{\vartheta_3(\tau)^2 \vartheta_0(\tau)^2} \end{aligned}$$

となり、相加平均と相乗平均の定義 (3),(4) と同じ形をしている。

ここで数学として最も価値あるものは何かといえば、レムニスケートでも算術幾何平均でも数値計算でもなく、楕円関数論である。そしてひとたび証明が完成してしまえば数値計算

は不要になるのだが、数値計算は定理の存在を人に気づかせるという重要な役割を担うのである。

ところで、もしもガウスの時代にコンピューターがあったとしたら、彼はそれを使っただろうか。ガウスの計算法は決して単純なものではなく、整数論の知識を援用した大変凝ったものだったようであり、彼が天文計算に膨大な時間を費すのを見兼ねた人が、ある有能な計算家を助手として推薦したときに、ガウスは「私が従来行った無数の計算において、単なる機械的計算能力を有するものから有効なる助力を得たろうと思われる場合はない」と語ったという。もしかしたらガウスは高速のコンピューターを喜ばなかったかも知れない。

5. 量子論

この小論の前半(2 節〜4 節)では、力学(や電磁気学)に代表される古典物理学が微分積分学によって適切に記述されたこと、逆に微分積分学が古典物理学によって育まれたこと、数学において数値計算が重要な役割を果たし得ること、また、このような数学と自然の関わり合いにコンピューターが参加するようになったことを述べた。

この節ではさらに、古典物理学以後の数理科学的思想の変遷を追い、数学と自然の関係がさらに成熟し、そこにコンピューターが絡む様子を見てみよう。

ラプラスの魔

19 世紀末に古典物理学の体系が完成し古典物理学的自然観が確立したとき、物理学者はある矛盾に逢着する。即ち、古典物理学は完全な因果律に従うものであるから、物理学者が作り上げた理論体系はすべてを予見し得る理論ということになるのである。古典物理学的な意味ですべてを知る者を「ラプラスの魔」という。‘今日’ を初期条件として ‘明日’ を計算することは実際には不可能だとしても、‘明日’ が理論的に確定しているという思想は健全ではない。魔的存在ならばいざ知らず、人の知性がかような思想を真理と認めることができるだろうか。

量子論の原理

ところがこのパラドックスは、思わぬ事態によりしばらく棚上げにされる。というのは、物理学者は原子内部の構造を見ようとして、古典物理学の自然像が誤りであることに気づくのである。そして紆余曲折を経た後、量子論の原理にたどり着き量子力学が成立するのだが、この歴史的事件は、ガリレイやニュートンたちによる近代自然科学の成立に比肩されるべき ‘科学革命’ と位置づけられている[24)]。

量子力学と数学

古典物理学と比べて、量子力学は数学的に込み入った構造をもっているため、物理サイドから数学サイドへの要求には大変高度のものがあり、その解決にはフォン・ノイマンのような ‘万能の天才’ を必要とした[25)]。そして量子力学が大きな契機となって、20 世紀前半に「関数解析」と呼ばれる数学の一分野が成立する[26)]。

関数解析は微分積分学の一つの発展形であるが、手短かに言えば、ひとつの関数を点と見て、関数が集まって空間をなすという描像に基づくものである。この描像は量子力学が出現する以前にすでに芽生えていたが、とくに量子力学はこの描像によって見通しよく記述することができることが分かり、また量子力学からの要請によって関数解析の内容が豊かになったという経緯がある。自然と数学の関係は、古典物理学と微分積分学の関係から量子論と関数解析の関係に移行したのである。

場の量子論

さて物理学の主要な関心は、量子力学を具体的な現象に適用する方向に移った。そして原子内部の問題を経て原子核内部の問題へと進み、結局素粒子の生成消滅を記述する理論が模索される。

ところで、コンピューターが実用に供されるようになると、物理学は数学以上にコンピューターの力を享受するようになった。数学ほど厳密性を重視しない物理学において数値計算が役立つということは、むしろ当然と言うべきである。とくに素粒子論のモデルの解析においてコンピューターは不可欠のものになるのだが、これには次のような事情がある。

現在受け入れられている素粒子論のモデルは「場の量子論」と呼ばれる数学的形式をもつ。その最初の例である「量子電磁力学」は、電子が光を放出・吸収する現象を記述する理論であり[27)]、実験的検証に十分耐えるものだった。その後、原子核を構成する力である「強い相互作用」を記述する形にまで理論が一般化された[28)]。しかしそれは、いわゆる形式論に留まらざるを得ず、具体的な数値的予言を系統的に行なうための確かな足場を欠いていた。というのは、「電磁相互作用」や「弱い相互作用」においては相互作用が‘弱い’ので、複雑な反応はきわめて起きにくいとして無視することが許されたのだが、「強い相互作用」は文字どおり相互作用が‘強い’ため、‘すべてのこと’が起きると考えなければならず、その結果、「電磁相互作用」や「弱い相互作用」において有効だった近似計算のアプローチ[29)]を「強い相互作用」において適切に進めることができないからである。

宇宙の格子模型

このような状況にあって、ウィルソンは‘宇宙’を有限個の点の集まりで置き換え(格子で近似し)[30)]、この‘近似的宇宙’において場の量子論を明確に定義する枠組を作った。これを「格子ゲージ理論」という[31)]。ウィルソンのアプローチの最大の特徴は、それ以前のアプローチと異なり、すべての量を第一原理からコンピューターで数値計算し得るところにある[32)]。即ち、ウィルソンは、「場の量子論は、コンピューターで数値計算できるものでなければならない」という立場を提唱したのである。

とは言え、格子ゲージ理論の数値計算は‘宇宙’を大きくすると大変長い時間がかかるため、たちまちコンピューターの能力を超えてしまう。現在でも直方体状の‘格子宇宙’の一辺に 20 個から 50 個程度の点を並べた大きさで計算を遂行し得るに過ぎない。理論的には、‘宇宙’の大きさを限りなく大きくするとともに限りなく密に点を取らなければならないが、このよう

な意味での二重の極限においてモデルがどのように振る舞うのかということについて、数学的に厳密に言い得ることは、現在のところきわめて限定的である。

素粒子論と数学

それでは素粒子論から数学が学ぶべきものは何だろうか。ウィッテンは次のような意味のことを述べている[33)]。

> 20 世紀の数学は 1 粒子の量子力学を主なテーマとしていたが、21 世紀には相対論的場の量子論のような多体量子物理がそれに代わるだろう。しかし、場の量子論はいまだ十分な一般性をもって数学的に確立されておらず、'物理によって動機づけられていない数学者' は場の量子論そのものを研究対象と見なすには至っていない。比較的単純な場の量子論を数学的に定義し、その幾何的な応用を実現することにより、数学における場の量子論の時代の到来を加速させよう。

コンピューターシミュレーションの積み重ねもあり、場の量子論が素粒子論を記述するための適切な数学の言葉であることは、もはや疑いがない。しかし現在のところ、場の量子論は健全な数学的基礎を欠いており、言わばガウスの算術幾何平均に関する数値計算の段階にある。したがって、古典物理学と微分積分学の関係や量子論と関数解析の関係に相当するものが、場の量子論(素粒子論)に見出されていないのである。この状況を踏まえて、場の量子論の確かな数学的基礎を築くことにより解析学の新分野を切り開こうというのがウィッテンの主張である。

6. 対称性とその破れ

現代物理学において、素粒子の振る舞いは、いわゆる「標準模型」によって記述されると考えられている。その実験的検証は、いよいよ最終段階に入ったと言える。その結果標準模型の正しさが立証されるかどうかはもちろんまだ分からない。しかしかりに標準模型からの逸脱が検出されたとしても、場の量子論という数学的枠組自体が揺らぐことはあるまい。万が一そのようなことがあったとしても、それで場の量子論の意義が消滅するわけではなく、場の量子論が妥当する範囲と限界が認識され、より深い自然の階層に目が開かれるきっかけになるものと考えられる。したがって、場の量子論そのものを研究対象とする数学の新分野を開拓しようというウィッテンの問題意識は、標準模型の実験的検証の結果の如何を問わず大変重要であり、文字通り数学における「時代の問い」と言うべきであろう。

'宇宙という書物' の '現代の章' から数学が学ぶべきものは何か —— 上述の通り、この問いへの答えはまだ得られていないが、現代物理学の重要な知見の一つである「対称性とその破れ」が '現代の章' を読み解く鍵となるメタファーの一つであることは間違いないと思われる[34)]。

この節では「対称性の破れ」の問題を取り上げ、その意味を考えたいのだが、その前に対称性の理念に触れる。

対称性の理念

地上において物体は上から下に落ちるが、横に落ちる事はない。地上では上下方向が特別な性質をもつように見える。しかし、上下方向の特殊性を空間の基本性質として初めから織り込んだ理論を物理学の基本法則とするわけには行かない。実際ニュートンの力学は本来空間に特別な方向はないという対称性の原理に立脚しており、地上における上下方向の特殊性は地球と物体との間の引力にその原因が帰せられる。また月は地球を中心として(近似的に)円運動しているので、地球が宇宙の特別な位置に置かれているかに見えるという偏りが生じており、平行移動に関する空間の不変性が損なわれていると言える。これに対し、ニュートンの力学は本来宇宙空間は等質的であって平行移動不変性をもつとし、この偏りの原因をやはり地球と月の間の引力に帰する。

ニュートンの力学ばかりでなく、自然科学の歴史全体を通して、対称性の理念は理論に恣意的な仮定を持ち込むことを抑制し、正しい基本法則に開眼させるために本質的な役割を果たして来た[35)]。自然は本来対称的であり、自然が示す偏りには原因がある —— これは大変分かりやすい哲学である。しかし、すべての偏りに原因があるのだろうか。

対称性の破れ

まず、化合物の立体構造について考える。ある構造が化学的に可能であるとき、その構造を鏡に映した構造も化学的に可能である。これは、量子力学の法則が鏡映変換に関する対称性をもつがゆえの理論的帰結であり、互いに鏡像関係にある 2 つの構造は化学的にまったく同等である。とくにアミノ酸の場合、いわゆる L 型アミノ酸と D 型アミノ酸は鏡像関係にあるので、両者の間に化学的な優劣はない。ところが、生体内で合成されるアミノ酸はすべて L 型であるという事実がある。即ち、L 型アミノ酸と D 型アミノ酸は生体内で鋭敏に区別され、現存する生物では L 型だけが利用されるという偏りが生じている。この偏りの原因は何だろうか。

次に、液体の対流を考える。2 枚の平行な板を水平に置き、その間に液体を詰める。この液体を下から一様に加熱するとき、火力が弱い間は液体は静止し、もっぱら熱伝導により熱が伝達される。このとき、液体の状態は水平方向の平行移動に関して不変である。しかし火力がある程度強くなると、対流が発生して流体が上昇する場所と下降する場所が生じる。その結果、液体の層が多数の '細胞' に分かれる。これをベナール対流という。このとき、火力がまったく一様であれば、液体は水平方向の平行移動に関して不変な環境に置かれていることになるが、それにも関わらず、対流の発生に伴って、'細胞' の境界がどこかに作られるという偏りが生じる。液体が細胞と細胞の境界の位置を決定する原理は何だろうか。

もう一つの例として、磁石を考える。鉄の原子は一つ一つが小さい磁石の性質をもっているが、温度が高いときには原子たちがバラバラの方向を向いているので、鉄全体として磁石

の性質をもたない。ここで外部から磁場をかけると各原子が磁場とほぼ同じ方向を向くので、鉄全体として磁石の性質をもつようになる。それでは、外部から磁場をかけないときはどうだろうか。鉄には近隣の原子が同じ方向を向きやすいという性質(強磁性)があって、温度が低いときには外界からの働きかけがなくても、近隣の原子同士の相談だけで全体の意見が揃い、同じ向きにそろってしまうことがある。こういうことが起きると、鉄は外からの命令によるのではなく、自発的に永久磁石になる。本来鉄はどの方向に磁化してもよいはずであるが、ある一つの方向を選んで磁石になる。鉄が磁化する方向を決める原理は何だろうか。

このような例は、実に枚挙にいとまがない。これらの現象において自然が見せる偏りの原因は何か。しかし、どこをどう捜しても結局明確な根拠にたどり着くことはない。

自然は、しばしば原因のない偏りを見せるのである。

自発的対称性の破れ

なぜ自然は原因のない偏りを見せるのだろうか。それは、目に見える現象の背後に無限に多くの自由度が存在し、それらが相互作用しているからである。少しばかり鉄の原子が集まっても、それが磁石になるということはない。しかし、きわめて多数の原子が大規模な協力をするときに、突然様相が一変するのである。このような現象を「自発的対称性の破れ」という。

自発的対称性の破れは、自然現象の様々の文脈において現れるが、就中、素粒子物理学においてはきわめて重要な意味をもつ。というのは、本来質量をもたない素粒子が相互作用の結果として質量をもつようになるという理論的機構の本質的部分を担っているからである[36)]。

話が跳ぶようだが、『荘子』の逍遥遊篇に次のような一節がある[37)]。

> 天の蒼蒼たるは其れ正色なるか。其れ遠くして至極する所なければか。其の下を視るや、亦た是くの若くならんのみ。
> (大空の深く青々とした色は、いったい大空そのものの色であろうか。それとも遠くへだたって限りがないから、そう見えるのであろうか。またその高みから地を見下ろすときも、同じように見えているに違いない。)

鯤という北の果ての海に住む大魚が鳥と化して鳳となり、南の果ての海に飛んで行く。鳳の背は何千里あるとも知れず、翼を広げると空一杯の雲のようだという。上掲の一節は、鳳が途方もない高さから天と地を眺めた光景である。空が青いのは、天井にペンキを塗ったからではない。空が青いのは、天が無限だからだ。—— これはいかにも、無限自由度系の自発的対称性の破れを思わせる一節ではないだろうか。

普遍遺伝コード

遺伝情報を表す塩基列(コドン)とアミノ酸との対応関係(遺伝コード)を考えてみる。1966年に遺伝コードが解読されてからしばらくの間は、一つの遺伝コードがすべての生物において普遍的に用いられているとされていた。遺伝コードが普遍的であるなら、それには理由が

あると考えたくなる。しかしクリックは

> コドンとアミノ酸の対応は物理化学的根拠に基づくのではなく、ランダムに定められており、進化のある時期に偶然対応関係が決まり、以後凍結されて現在に至った

という考えを打ち出した[38)]。これもまた遺伝コードの普遍性と相性がよい仮説であり、モノーの「無根拠性」[15)] を想起させるものがある。そして、もしもクリックの所説どおりであれば、遺伝情報はまさしく「情報」であり、実在の遺伝コードは自然が見せる「原因のない偏り」の一つであると言える。

しかし、その後次第にクリックの説は修正を要することが分かってきた。即ち、

(1) 「普遍遺伝コード」は完全に普遍的ではなく、例外が存在すること
(2) 遺伝コードは完全にランダムに定められたものではなく、ある種の根拠をもつこと
(3) 遺伝コードは凍結されておらず、わずかながら変化していること

が明らかにされ、遺伝コードは何らかのメカニズムにより動的に進化していると考えられるようになった[39)]。しかしこれだけの理由から、遺伝コードが現在見られる形に進化する道が完全に必然的であったとは断言できない。現代物理学における「自発的対称性の破れ」の概念を踏まえれば、進化的に同等に有利な複数の遺伝コードが存在し、その中の一つが偶然選ばれたというシナリオも考えられる。つまり遺伝コードは、完全に必然的でも完全にランダムでもなく、偶然と必然の産物なのではあるまいか。

原因のない偏りの原因

自然はしばしば原因のない偏りを見せる。しかし正確に言えば、自然において偏りが生じるべき理由(あるいは条件)はあるが、どの方向に偏るかを決める根拠がないのである。たとえば、鉄の塊が自発磁化を発生するための温度条件や自発磁化の大きさについては理論的に理解することができるが、自発磁化の方向を理論的に予言することは原理的に不可能なのである。

また、進化的に同等に有利な複数の遺伝コードの一つが進化の過程で選ばれたとすれば、この偏りが生じた原因は副次的なこと、あるいは観察不可能なほど微細な ‘雑音’ だったのだろう。この無限小の雑音を観察可能な現象にまで増幅する機構が自然界に存在し、その機構は、無限自由度をもつ大規模なモデルによって記述されると考えられる。

自然が見せる偏りには根拠がないものがある。正確に言えば、偏りの方向を予言することが原理的に不可能な場合がある。このような現象を「自発的対称性の破れ」といい、偏りの方向を定めるところのものを「偶然」と呼ぶのである[40)]。

7. 未来の章 —— パラドキシカルな問題たち

前節まで自然科学における様々な問題解決のありさまを中心に見てきたが、これからある種の未解決問題に目を向けることにする。'宇宙という書物' の '20 世紀の章' のまだ読み解かれていない部分は '21 世紀の章' につながっており、その狭間にパラドキシカルな未解決問題が見える。

原理的立場

問題解決と言っても、何をもって解決とするかは立場によって異なる。たとえば、物理的問題を数学的厳密性を犠牲にせずに解決する立場と、厳密性にはあまり拘らずに近似的議論を許す立場がある。またこの観点とは別に、あくまで基本法則から結論を導くことを目標にするか(原理的立場)、それとも、基本法則に加えて何らかの現象論的な性質を仮定することを許すか(現象論的立場)の相違もある。どの立場に立つかによって解決の水準が異なる。

たとえば、電気抵抗の両端に電圧をかけると電流が流れるが、電流の大きさはいわゆるオームの法則によって与えられるので、電気抵抗を組み合わせた回路の動作は、オームの法則を用いて解析することができる。これが現象論的な立場である。他方、電磁気学の基本法則からオームの法則という現象論的仮定を導くことが(原理的には)できるはずであり、このようにして根源的な問題解決を図る立場が原理的立場である。現象論的立場は原理的立場よりプラグマティックであり問題解決は容易であるが、現象論的仮定を基本法則から導く問題を残すことになり、いずれは原理的立場から完全に問題を解決することが望まれる。

パラドキシカルな問題

第 2 節でフェルミ、パスタ、ウラムの問題に言及したときに触れたが、過去と未来を明確に区別している我々の経験を、過去と未来を区別しない力学法則に基づいて説明できるかという問題がある。最初にこの問題に挑んだのはボルツマン(1844-1906)である。ボルツマンは、当時まだ実験的確証がなかった原子論の正しさを信じて、原子論に基づいて力学的に熱現象を説明しようとしたのである。しかしロシュミット(1821-1895)は、本来過去と未来の区別がない力学法則に基づいて、過去と未来が明白に区別できる熱力学的現象を導くことは不可能なはずであるとして、ボルツマンの結果を批判した[41)]。実際ボルツマンの考察には現象論的な仮定が紛れ込んでおり、論理的に完全な物ではなかった。ボルツマンはこのような批判に対して確率論的立場から反論し、力学を確率論的に考察する必要性を強調したのだが、決定論的な力学に従う系がなぜ非決定論的に振る舞うのかという疑問が新たに生じることになる。この問題は、本来過去と未来の入れ換えに関して対称的である力学世界において、過去と未来の対称性が自発的に破れる現象として理解し得る可能性があるが、いまだに完全な解決を見ていない。

さて、原理的立場に立って(力学法則のような)基本法則から(熱力学的性質のような)現象論的性質を導出する問題は、現象論的性質が基本法則と矛盾するとき、逆説的な様相を呈する。このようなパラドキシカルな問題の場合、文字通りの意味での解決は不可能になる。し

かし自然現象は実在しているのであるから、基本法則が正しいとすれば現象は基本法則に基づいて説明される道理であり、どのような意味で逆説が解消するのか一段深い考察が必要になる。この種の問題は原理的な意味での難しさに最大の特徴があるのであって、単に技術的な意味で難しいというわけではない。

しかし、プラグマティックな観点からこのような問題に価値をおかない向きもあろう。これに対し、知の体系性の観点からその重要性を主張することは可能であるが、もともと自然においては基本法則も現象論もパラドックスもなく、ただ如々としてあるものを、人の知がそれを理解しようとするとき、知の世界にパラドックスが生じるのである。このパラドックスはいつか解消するのだろうか。―― これは興味深い問題である。

量子論の光と影

次に、量子力学において、原理的立場から重要であると思われる未解決問題を取り上げ、そのパラドキシカルな性質を見てみたい。

量子力学は完成した物理理論であり、その正しさを否定する実験的証拠は何もない。分子生物学者のデルブリュックは、量子力学についてのボーアの思想に啓発され、量子論に続く第二の科学革命が生命現象を舞台として起きることを期待して、量子力学では記述できない生命現象を探したという。しかし皮肉なことに、生命現象に量子力学を適用する試みはことごとく成功したのである[42)]。

それでは、量子力学への根本的疑念はすべて晴れたかというと、そうではない。量子力学における因果律を巡る問題が残されているのだが、その前に量子力学という理論の基本構造について、簡単に記しておく.

量子力学の基本構造

量子力学の法則は 2 つの部分からなる。第 1 の部分は、物理系の ‘量子力学的状態’ が時間とともにどのように変化するかを記述する部分であり、第 2 の部分は、‘量子力学的状態’ の意味、即ちその ‘状態’ にある物理系を観測したらどのように見えるかを記述する部分である。前者は、量子系の内部的な振る舞いを規定し、後者は、量子系と外界とのつながり方を規定する。量子系自体は、第一の規定によって定義が完了するが、単にそれだけでは空想の世界のゲームと変わりがない。そもそも量子力学に従う物理系がこの世界に存在するなら、それは何らかの方法で観測できるはずであり、観測の結果は、測定装置の針の位置や液晶画面の表示のような古典物理学に属する概念によって表現されなければならない。したがって、‘量子力学的状態’ の意味を問うためには、量子系と外界とのつながりを問わなければならず、そのつながりを「量子系と古典系の接触」と捉えるのである。

この問いに対する答えとなる量子力学の第二の規定は次のようなものである。

(1)　量子力学的状態から、測定結果の確率分布を定めることができる
(2)　測定を行うと、量子力学的状態は、別の量子力学的状態に瞬間的に遷移する

即ち、ある量子力学的状態に対して、何らかの測定を行った結果は一般に確定せず、測定のたびに結果が異なる。その確率分布は量子力学的状態から定めることができるが、可能な選択肢のどれが選ばれるかを理論的に確定することは原理的に不可能である。また、測定直後に量子系がどのような状態に遷移するかを確定できないので、量子系は古典系との接触によって因果律を破る。

これを「量子力学の確率解釈」という。物理学の基本法則において因果律が明示的に否定され、確率の概念が現れることに注意したい。

サイコロを振る神

因果律は物理学の魂とでもいうべきものであり、そう簡単に放棄できるものではない。アインシュタインはある私信の中で、次のように書いている[43]。「神のカードを覗くのは困難に思える。しかし、私は一瞬たりとも、神がサイコロ振りをし、'テレパシー' 的手段を用いる(現代の量子論は神がそう振る舞うと断言している)とは信じることができない。」量子力学が誤りであると信じてその論理的欠陥を突こうとするアインシュタインと、量子力学が正しいことを信じて反論するボーアとの応酬は、量子力学の成立史における印象深いエピソードとして広く知られている[44]。しかし、電子や光のように、粒子的な性質と波動的な性質を併せ持つパラドキシカルな物理的存在に合理的な描像を与え、様々な実験事実を定量的に説明する量子力学を整合的に解釈するために、因果律を放棄せざるを得ないというのが量子力学の建設者の結論であった。

このように言うと、因果律の破れは、解釈上の便宜に過ぎないという印象を与えるかも知れないが、因果律の破れは実験的に検証された事実である。実際、ラザフォードとガイガーは、放射性物質の崩壊頻度を計測して、崩壊現象はまったくランダムに起きるという結論を得ている[45]。ただし、この実験がなされたのは確率解釈が提出される 16 年ほど前、1910 年のことであり、ラザフォードたちは、「なぜランダムなのか」ということについて、深く追求しなかったようである。また、量子論的な現象において因果律が破れているとは言うものの、因果律の破れは、量子系と古典系が接触するときに限られており、量子系の内部的な運動は因果律に従っているということに注意しておきたい。

観測問題

ここで、量子力学の基礎的問題の積み残しが明らかになる。というのは、測定装置も素粒子で作られているのであるから、測定装置も量子力学に従うと考えなければならず、本来一体である系を量子力学系と観測装置に分離し、後者を外界と見なすという設定自体が現象論的であると言わなければならない。したがって、原理的立場に立って考えれば、量子系と測定装置からなる全体に量子力学を適用して、測定過程を量子力学的に分析するという問題が発生することになる。言い換えれば、量子力学の法則の第一の規定から第二の規定を導出するのである[46]。この仕事が完了しなければ、量子力学の整合性が確かめられたとは言えない。

ここで再度注意したいのは、量子力学の法則の第一の規定、即ち量子系の内部的な法則は、

因果律を満たしているということである。とすると、第一の規定から第二の規定を導出する問題は、因果律を満たす基本法則に基づいて、因果律を破る現象論的性質を導出しなければならないことになり、パラドキシカルな問題であることが分かる。この問題は「観測問題」と呼ばれ、現在も解決していない。しかし、量子力学が建設された当時、このやっかいな問題を現象論的に「第二の規定」として扱い、当面問わないことにするという実際的な戦略が効を奏したと言える。

深い矛盾

量子力学の建設において、中心的な役割を果たしたボーアは、よく次のように言っていたそうである[47)]。「もし正しい命題があれば、その命題の逆は正しくない命題、偽の命題であることはもちろんだ。しかし、深い真理があるときには、その逆もやはり深い真理なのだ。」粒子性と波動性の矛盾に悩んだボーアの哲学的思いが伝わって来るような言葉であるが、「深い真理」は「深い矛盾」と同義語のように聞こえる。量子力学はまさに矛盾とともに生まれ育ったかのようである。

さて、観測問題に対してどのようなアプローチがあり得るだろうか。たとえば、測定装置を用いて電子の状態を測定する過程を記述するために、測定装置を量子力学系として定義し、電子と測定装置が相互作用するモデルを考えるとする。そして、巨大な系である測定装置はきわめて大きい自由度をもち、電子の状態が引金になって自発的対称性の破れを引き起こすという状況を想定する。ここで重要なのは、測定装置は確率論的な系ではなく、決定論的な運動法則、つまり量子力学に従うことを仮定しなければならないということである。というのは、測定装置が確率論的な性質をもつことを初めから仮定するということは、観測問題の結論を初めから仮定することに他ならないからである。測定装置はあくまで決定論的な量子力学系として定義されなければならず、確率論的性質や古典的性質など、いかなる現象論的仮定ももちこんではならない。測定装置の性質として許される仮定は、巨大であることと対称性が自発的に破れる条件下にあることである。果たしてこのような設定において、巨大な系の自由度を限りなく大きくする極限を考えることにより、因果律が破れて確率論的な性質が現われ、過去と未来の区別が生じることを示せるだろうか。

生きている物質

今までこの節で触れた問題は、言わば 20 世紀からの宿題であるが、未来の数理科学に目を転じれば、生命科学が見えるだろう。しかし、無機的な原子からなる構造体が生命をもつという事実は、きわめてパラドキシカルである。それでは、生命と非生命を区別するものは何だろうか。

たとえばカルシウムイオンを細胞の外に輸送する機能をもつカルシウム輸送性 ATP 酵素は、分子量が 11 万以上ある巨大な分子である。輸送すると言っても、細胞の内外でカルシウムは数千倍の濃度比をもつので、この大きい濃度勾配に逆らって自然にカルシウムが移動するということはあり得ない。そこで、カルシウム輸送性 ATP 酵素は、ATP のエネルギーを

利用してカルシウムを移動させるという高度の技を用いており、そのために特別なしかけをもっている。この酵素は、基本的には 800 以上のアミノ酸が一列につながった鎖であるが、この鎖を適当な環境下に置くと、鎖の様々の部分が互いに引き合い、最も安定な形に折り畳まれる。その結果、立体的に特異な構造を取り、酵素としての合目的的な機能を発現するのである。

一般に、生体高分子の機能は、鎖としてのアミノ酸配列に由来し、その配列は遺伝情報として蓄えられ受け継がれている。このことを考えると、生きていない物質から生きている物質を区別する特徴は、後者がもつ高度に非自明な情報にあるように思われる。

テキストを読むことと書くこと

アミノ酸配列が与えられれば、原理的には立体構造が定まるはずである。実際、アミノ酸の鎖を適当な環境下に置くと、瞬く間に折り畳まれて立体構造が作られるのだが、計算によってその立体構造を決定するには、現代のコンピューターでも速度が十分とは言えない。モノーは、アミノ酸配列からタンパク質の立体構造を再現することは絶望的に困難であるという意味で、アミノ酸配列を記した遺伝情報を「本質的に解読不能なテキスト」と呼んだ[48)]。しかし、コンピューター技術はハードウェアもソフトウェアも日進月歩であり、「本質的に解読不能」という表現は今日では不適切になりつつある。

しかし、遺伝情報の高度な非自明性についての本質的な問題は、テキストを解読することもさることながら、むしろテキストを書くことであろう。というのは、テキストを解読することは、言わば与えられた答を理解することに相当するが、テキストを書くことは、その答を自分で見つけ出すこと、即ち自然の創造を再現することにほかならないからである。しかし、20 種類のアミノ酸を 800 個連結する方法は 10^{1000} 通りほど存在するのに対し、地球の年齢は 10^{18} 秒ほどであるから、単純な戦略で有用な構造に到達することはまず期待できない。自然は進化論的な時間の長さの中で、どのようにして有用なアミノ酸配列を見出したのだろうか。進化論的な時間スケールは通常の化学反応に比べれば想像を絶する長さである。想像を絶する長さの時間がもつ可能性について人はまだ十分な洞察を得ていない。

すでに述べたように、新たな数理科学は新たな数学の技法を必要とし、技法が蓄積される中で新たな数学の分野が形成されてきた。それでは、古典物理や量子力学に微分積分学や関数解析が対応しているように、生命科学に対応する数学とはどのようなものだろうか。それはガウスの楕円関数論のように ‘美しい数学’ だろうか。またコンピューターとの関係はどのようなものになるのだろうか。

数理科学としての生命科学が熟成する中で育まれる数学は、多分コンピューターと不可分のものになるだろう。したがって、数学のあり方は根本から変革されることになり、‘美しい数学’ の概念には収まらないかも知れない。

自然の階層性

ところで当然のことながら、酵素を一つ作ることができたとしても生命を理解したことに

はならない。生命科学においては、スケールの異なる階層を何段階かつなぐ必要がある。上位階層と下位階層をつなぐには、まず上位階層において成立する現象論的な性質を適宜利用して問題を解決するという方法が現実的である。あるいは、系の自由度を上位階層の自由度と下位階層の自由度にうまく分離し、それらの自由度が相互作用するという描像に基づいて、何らかの現象論的近似を用いて系を解析するという方法も考えられる。そして、これらの仕事がすんだ後で、あらためて現象論的仮定について原理的立場から問い直すことになるのだろう。ここで、上位階層における現象論的性質が下位階層における法則と矛盾するとき、原理的問題はパラドキシカルな問題となる。

生命科学は生命と非生命を結ぶ科学である。したがって、必ずどこかでパラドキシカルな問題に出会うはずである。生命科学におけるパラドキシカルな問題はどのような形で現れるのだろうか。デルブリュックが期待した生命科学における科学革命は、どこで待っているのだろうか。

知の体系

自然科学の様々の分野にそれぞれの先端があり未解決問題があることは言うまでもないが、見事な成功の後に、棚上げされた矛盾が残されていることがある。そのような矛盾は、自然法則の異なる階層間の矛盾として存在している。原理的な立場に立って、このような矛盾を完全に解消することは可能なのだろうか。自然科学という人の知の体系は、その全体が整合的に構築される形で一体となって拡大して行くのか、それとも一定の範囲をカバーする理論単位が仮説的な関係を媒介としてつながる形で成長して行くのか。即ち、人の知の世界全体を矛盾のない形で構築することは可能なのだろうか。—— 現代はまだそれを判断するときではない。

謝辞　この稿の執筆に当たり、日本医科大学の高市真一氏、長谷部孝氏、藤崎弘士氏からご教示をいただいた。ありがとうございました。

注と文献

1) 原題：*Titanic*, 製作・監督・脚本：James Francis Cameron, 主演：Leonardo Wilhelm DiCaprio (1997).
2) ニキフォロフスキー：馬場良和訳 『積分の歴史』(現代数学社, 1993)；上垣渉 『アルキメデスを読む』(日本評論社, 1999).
3) ガリレオ・ガリレイ 『偽金鑑識官』. 全文(山田慶児, 谷泰訳)が、豊田利幸責任編集 世界の名著 21 『ガリレオ』(中央公論社, 1980)に収められている。引用した部分は、第 6 節(p. 308)に見える。引用した断片や書物全体の執筆された背景も興味深い。
4) 特殊相対論において、速度の和の法則はベクトルの和と同じではない。
5) 山本義隆 『古典力学の形成』(日本評論社, 1997).

6) N.R. ハンソン：村上陽一郎訳 『科学的発見のパターン』（講談社学術文庫, 1986）.
7) 実際にニュートンが示したのは、軌道が楕円ならば引力は逆 2 乗力であるということであって、その逆(引力が逆 2 乗力ならば軌道は楕円であるということ)ではない。
8) 未発表の考察において、ニュートンが力学の計算に微分積分学を用いたかどうかという興味深い問題は、長く議論されてきた歴史があり、次の文献に詳しい。高橋秀裕『ニュートン』（東京大学出版会, 2003）.
9) 「引力が逆 2 乗力ならば軌道は楕円である」という(『自然哲学の数学的原理』とは逆の論理的方向の)事実を示すには、微分積分学が必須である。
10) 佐々木力 『数学史』（岩波書店, 2010）.
11) ジャン=ピエール・ランタン：丸岡高訳『われ思う、故に、われ間違う』（産業図書, 1996）.
12) ヴィクター J. カッツ：上野健爾，三浦伸夫訳 『カッツ 数学の歴史』（共立出版, 2005）.
13) この観点は長岡亮介先生による。
14) モデルを日常的に用いる現代の物理学者は、実在としての自然と仮想的なモデルを不用意に同一視する傾向があるという指摘もある(デイヴィッド・マーミン 「物理学者の悪い癖」 パリティ Vol.25 No.09（2010）54)。自然科学がじかに実在を論ずることはないのであり、したがって自然科学の問いとして「実在とは何か」を問うべきではない。
15) J. モノー：渡辺格，村上光彦訳 『偶然と必然』（みすず書房, 1972）．無根拠性の概念は 4 章に現れる。
16) 遺伝情報はまさしく「情報」であり、遺伝コードは生物進化の歴史において「情報」が創造的に利用された顕著な例であると言えるだろうか。
17) 湯川秀樹監修 現代物理学の基礎［第 2 版］ 第 5 巻 『統計物理学』（岩波書店, 1978）.
18) この問題は 7 節でふたたび取り上げる。
19) 正確には、線形な(即ち、正確にフックの法則に従う)バネで結ばれた質点系。
20) 正確には、バネに非線形性をもたせる。
21) フェルミたちが取り上げた非線型振動の問題は現在でも数学的に未解決である。
22) 和達三樹 『非線型波動』（岩波書店, 1992）.
23) 高木貞治 『近世数学史談』（共立出版, 1977）.
24) トーマス・クーン：中山茂訳 『科学革命の構造』（みすず書房, 1971）.
25) ノーマン・マクレイ：渡辺正，芦田みどり訳 『フォン・ノイマンの生涯』（朝日新聞社, 1998）.
26) フォン・ノイマン：井上健，広重徹，恒藤敏彦訳 『量子力学の数学的基礎』（みすず書房, 1957）.
27) 量子電磁力学によって記述される現象は、電子や陽電子(のような荷電粒子)による光子の放出・吸収のほか、電子と陽電子の対生成・対消滅がある。
28) 非可換ゲージ理論の一つである量子色力学。
29) 摂動論的アプローチ。

30） 正確に言うと、3 次元空間と時間からなる 4 次元時空を有限個の点で置き換えるという近似。

31） I. Montvay, G. Münster, *Quantum Fields on a Lattice*（Cambridge University Press, 1994）.

32） 格子ゲージ理論の数値計算では非摂動論的アプローチが可能である。

33） E. Witten, Some questions for constructive field theorists, in *Constructive Physics, Lecture Notes in Physics*, LNP 446（Springer, 1995）.

34）「自発的対称性の破れ」という概念一つで現代物理学が片付くというわけではもちろんない。現代物理学の諸相を数学の眼で見るとき、古典物理学には登場しなかったこの概念は大変魅力的に映り、将来の新しい数学において本質的な意味をもつと思われるのである。

35） ニュートンは、宇宙において絶対的に静止している座標系の存在を想定しているという意味で、ある種の偏りを理論に導入している。しかし実は、力学に絶対静止座標系を導入する必要はない。マッハによるこの重要な批判的認識が、アインシュタインによる特殊相対性原理の樹立につながった。

36） 小林誠 「質量の起源」 数理科学 No. 567（2010）26-31.

37） 金谷治訳注 『荘子』（岩波書店, 1971）.

38） F.H.C. Crick, The Origin of the Genetic Code, J. Mol. Biol., **38**（1968）367-379.

39） 渡辺公綱，鈴木勉 『遺伝暗号の普遍性と進化的変遷』 蛋白質 核酸 酵素 Vol. 51 No. 7（2006）844-852.

40） H. ポアンカレ：吉田洋一訳 『科学と方法』（岩波書店, 1953）において、ポアンカレは「偶然」を次のように定義している。「吾々の眼にとまらないほどのごく小さい原因が、吾々の認めざるを得ないような重大な結果ひきおこすことがあると、かかるとき吾々はその結果は偶然に起ったという。」ポアンカレの見解は、夏目漱石の『明暗』の中に、次のように引用されている。「だから君、普通世間で偶然だ偶然だという、いわゆる偶然の出来事というのは、ポアンカレーの説によると、原因があまりに複雑過ぎてちょっと見当がつかない時に云うのだね。ナポレオンが生れるためには或特別の卵と或特別の精虫の配合が必要で、その必要な配合が出来得るためには、またどんな条件が必要であったかと考えて見ると、ほとんど想像がつかないだろう。」

41） ロシュミットによる不可逆性の批判とともに、ツェルメロによる再帰性の批判も重要である。これらの問題は、テル・ハール：田中友安，池田和義訳 『熱統計学』（みすず書房, 1960）に詳説されている。

42） ボーアの思想の中で、デルブリュックが最も強い影響を受けたのは、「相補性」の概念だったという。デルブリュックの生涯は、次の書物に詳しく描かれている。E.P. フィッシャー，C. リプソン：石館三枝子，石館康平訳『分子生物学の誕生』（朝日新聞社, 1993）.

43） アブラハム・パイス：西島和彦監訳 『神は老獪にして…』（産業図書, 1987）.

44) Mendel Sachs：原田稔，杉元賢治訳 『アインシュタイン vs ボーア』（丸善, 1991）.

45) E. Rutherford, H. Geiger, The Probability Variations in the Distribution of α Particles, The London, Edinburgh and Dublin philosophical magazine and journal of science, Ser. 6, **20**（1910）698-707.

46) この問題は、幾何学における「平行線の公準」を連想させる。平行線の公準というのは、「与えられた 1 点を通り、与えられた直線に平行な直線がただ一つ存在する」という意味をもつ公理である。ユークリッドの時代から、平行線の公準を（他の公準から）定理として導く努力が重ねられたが、すべて失敗した。そして、19 世紀に至って、平行線の公準が成り立たない幾何学が存在することが分かり、この種の努力は無駄であることが明らかになった。因みに、平行線の公準が成り立たない幾何学は、曲面上の幾何学として実現され、後にアインシュタインが重力場の理論を作ったとき、一般相対性理論の数学的基盤となった。

47) W. ハイゼンベルグ 「理論、批判、そして哲学」. 引用した訳は、A. Salam 編：清水韶光訳 『地上と星の中のエネルギー』（海鳴社, 1975）に収録されている。

48) J. モノー：渡辺格，村上光彦訳 『偶然と必然』（みすず書房, 1972）. アミノ酸の立体構造を決定する問題には、5 章で言及している。